Boros Béla[*]

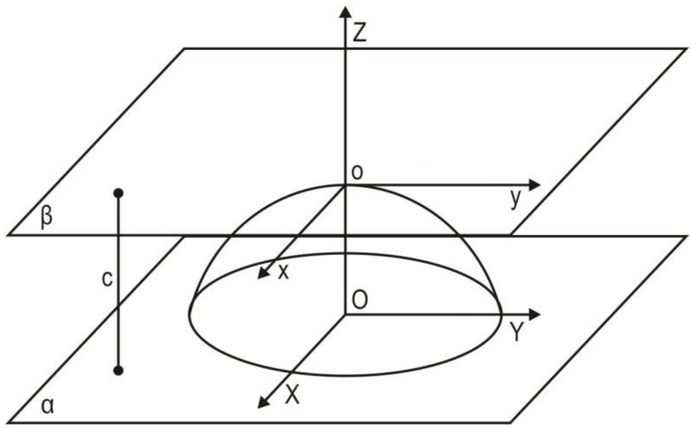
Az euklidészi geometria alkalmazása a relativisztikus sebesség összeadásában

Absztrakt: *Jelen dolgozat egy tisztán a matematika nyelvén is megfogalmazható kérdésre ad egy lehetséges választ. A kérdés így hangzik: definiálható-e a c sugarú nyílt gömb megengedett vektorainak halmazán egy kétváltozós belső művelet (összeadás), amely ezen a halmazon kommutatív csoportot alkot? A kérdésben szereplő megengedett vektor a háromdimenziós euklidészi tér egy tetszőleges c sugarú nyílt gömbjében olyan vektor, amelynek kezdőpontja a gömb középpontja, végpontja pedig egy belső pont. A belső műveletet pedig úgy értelmezzük, hogy bármely két megengedett vektor összege is megengedett vektor. A dolgozatból látni fogjuk, hogy a bemutatásra kerülő eljárás végén definiálható egy összeadás, amely kommutatív csoportot alkot a megengedett vektorok halmaza felett.*

1. A koordináta rendszerek megválasztása

Legyen az α és β két párhuzamos sík az euklidészi háromdimenziós térben. A két sík közötti távolság *c*, ami a fény vákuumbeli terjedési sebességének intenzitása. Ezután választunk egy *c* sugarú nyílt félgömb felületet, amely úgy helyezkedik el az α és β síkok között, hogy érinti a β síkot a félgömb felület peremét alkotó körvonal pedig az α síkban van. Ez után az *OXYZ* derékszögű koordinátarendszert úgy válasszuk meg, hogy $O \epsilon \alpha$ a *c* sugarú kör középpontja, az *OZ* tengely pedig áthalad a félgömb felület és a β sík érintési pontján. Ebből következik, hogy az *OX* és *OY* tengelyek az α síkban vannak. A β síkban is felveszünk egy *oxy* derékszögű koordinátarendszert úgy, hogy az *o* origó az érintési pont legyen, az *ox* és *oy* tengelyek pedig az *OX*, *OY* tengelyekkel legyenek párhuzamosak és az egységek a tengelyeken egyenlők mindkét koordinátarendszerben.

[*] *Boros Béla, matematikatanár, Zentai Gimnázium, Zenta*



1. ábra

2. A gamma leképezés

Az α síkban levő nyílt körlemez bármely belső nagy *A* pontja meghatározza annak **a** helyzetvektorát is. Ezután az *A* pontot az α és β síkra merőleges vetítő sugárral felvetítjük a gömbfelületre, az *A'* képpontot pedig az *O* origóból a β síkra. Ez a képpont az *A*''. Ez euklidészi geometria eszközeivel igazolható, hogy a két vetítés kompozíciója bijektív leképezés a nyílt körlemezből a β síkba. A gamma leképezést a lineáris algebra segítségével is megadhatjuk. Mivel az *A* pont a *c* sugarú nyílt körlemez belső pontja az **a** helyzetvektora az *OXY* koordinátarendszerben

(1) $$\boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} \text{ és } |\boldsymbol{a}|^2 < \boldsymbol{c}^2$$

Az *A* pont merőleges vetítéssel kapott *A'* képpontjának helyzetvektora az *OXYZ* koordinátarendszerben

(2) $$\boldsymbol{a}' = \begin{vmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{vmatrix} \text{ amelyre } {a_1}^2 + {a_2}^2 + {a_3}^2 = c^2$$

ebből

(3) $${a_3}^2 = c^2 - |\boldsymbol{a}|^2 \text{ vagyis } a_3 = \sqrt{c^2 - |\boldsymbol{a}|^2}$$

Az *A'* – nek az *O* origóból a β síkra vetített *A''* képpontját úgy kapjuk meg, hogy a **a'** vektort azzal a skalárral szorozzuk, amelynél a szorzatvektor végpontja (A'') a β síkban van. Azaz

(4) $$\gamma \begin{vmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \gamma a_1 \\ \gamma a_2 \\ \gamma a_3 \end{vmatrix} \text{ és } \gamma a_3 = c$$

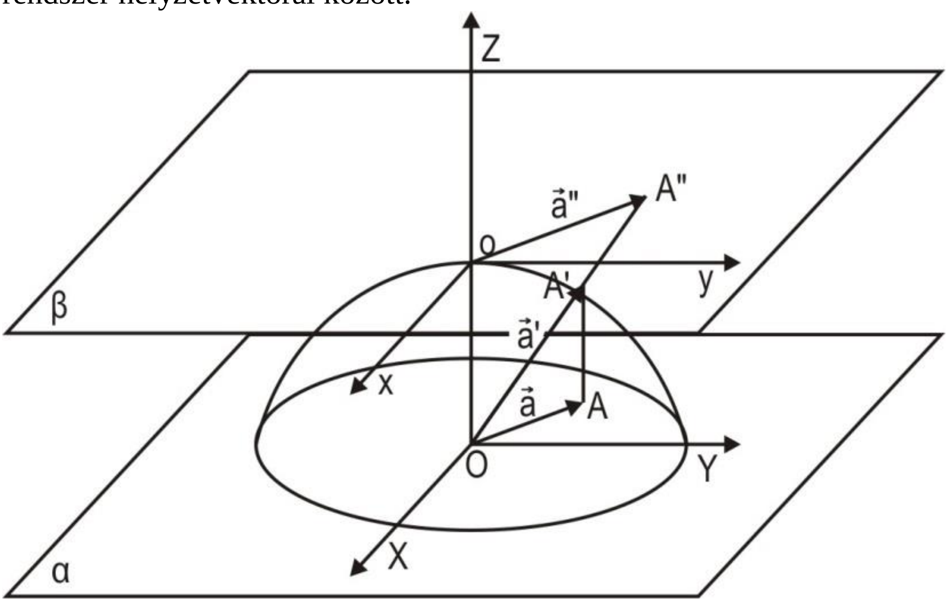
Mivel (3) – ból és (4) – ből következően $\gamma\sqrt{c^2 - |\boldsymbol{a}|^2} = c$. Ebből a γ-t kifejezve a következőt kapjuk

(5) $$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{|\boldsymbol{a}|^2}{c^2}}}$$

azaz az **a** vektor Lorentz faktorát mit $\gamma(\boldsymbol{a})$ - val jelölünk, ami valójában egy funkcionál, egy leképezés amely a vektorhoz valós számot skalárt rendel. A 2. ábráról látható, hogy a *OXYZ* koordinátarendszerben az **a** és az **a’’** vektorok kollineárisak és a vektorösszeadás háromszög szabálya alapján

(6) $$\boldsymbol{a}'' = \gamma(\boldsymbol{a}) \cdot \boldsymbol{a}$$

ami egy bijekció a nyílt körlemez helyzetvektorai és az *oxy* koordináta-rendszer helyzetvektorai között.



2. ábra

3. Delta vetítés

Legyen *U* pont a β sík egy tetszőleges pontja, **u** pedig helyzetvektora az *oxy* koordinátarendszerben $\boldsymbol{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$ koordinátákkal. Ekkor az *U* pont és a *OXYZ* koordinátarendszerbeli helyzetvektorának koordinátái a két koordinátarendszer közötti összefüggésekből következően

(7) $$\begin{vmatrix} u_1 \\ u_2 \\ c \end{vmatrix}$$

Az *U* pontot úgy vetítjük a félgömb felszínére, hogy a (7) vektort egy δ skalárral szorozzuk azzal a feltétellel, hogy a szorzatvektor végpontja a félgömb felszínén legyen. Ezt a végpontot *U'* – vel jelöljük.

(8) $$\delta \begin{vmatrix} u_1 \\ u_2 \\ c \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \delta u_1 \\ \delta u_2 \\ \delta c \end{vmatrix}$$ és

$$\delta^2 {u_1}^2 + \delta^2 {u_2}^2 + \delta^2 c^2 = c^2$$

A feltételt átalakítva

(9) $$\delta^2 (c^2 + |\boldsymbol{u}|^2) = c^2$$

majd a δ-t kifejezve

(10) $$\delta = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{|\boldsymbol{u}|^2}{c^2}}}$$

amellyel az **u** vektor egy faktorát kapjuk és $\delta(\boldsymbol{u})$ - val jelöljük.

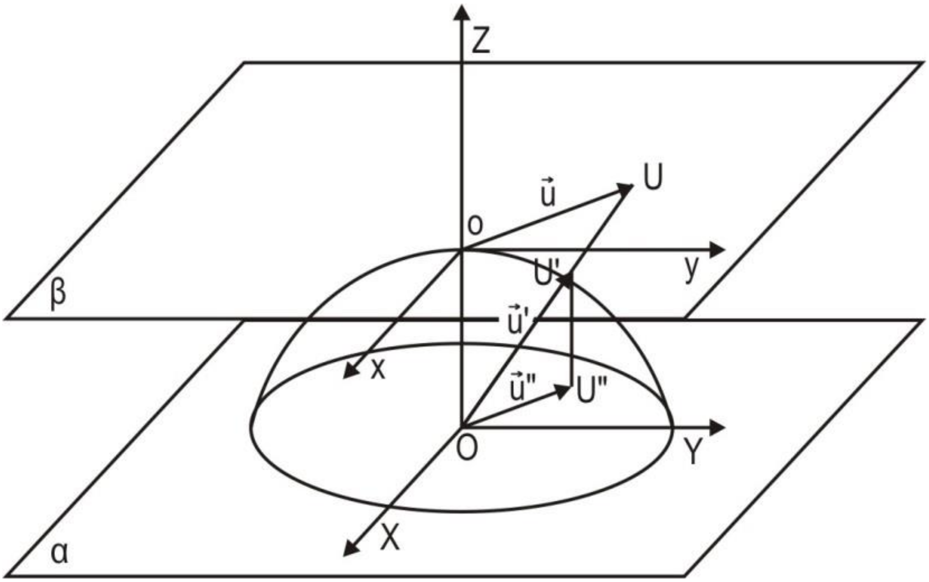
Az *U'* pont **u'** helyzetvektora az *OXYZ* koordinátarendszerben

(11) $$\boldsymbol{u}' = \begin{vmatrix} \delta u_1 \\ \delta u_2 \\ \delta c \end{vmatrix}$$

melynek merőleges vetülete az *OXY* síkra

(12) $$\boldsymbol{u}'' = \begin{vmatrix} \delta u_1 \\ \delta u_2 \end{vmatrix} = \delta \begin{vmatrix} u_1 \\ u_2 \end{vmatrix} = \delta \cdot \boldsymbol{u}$$

Tehát a $\delta(\boldsymbol{u}) \cdot \boldsymbol{u}$ leképezés egy bijekció az *oxy* sík helyzetvektorai és az *OXY* sík középponti helyzetű *c* sugarú nyílt körlemez helyzetvektorai között.



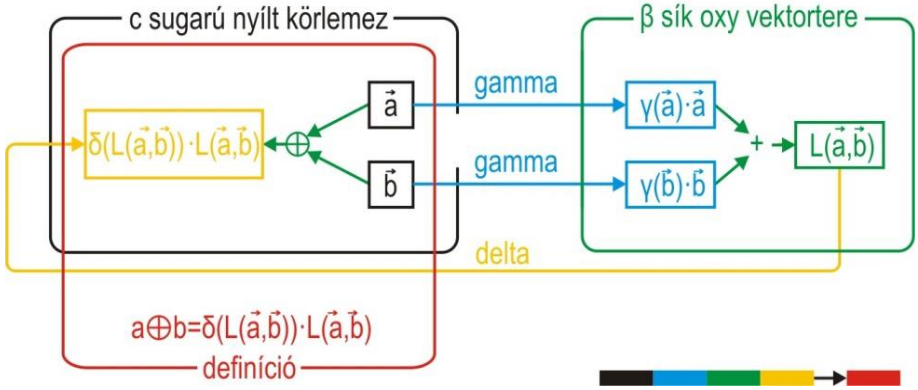
3. ábra

4. Vektorösszeadás a *c* sugarú nyílt körlemezen

Legyen az **a** és **b** az *OXY* sík *c* sugarú középponti helyzetű nyílt körlemezének két tetszőleges vektora, melyek közös kezdőpontja *O*. Az **a** és **b** vektorok összeadásának eljárása:

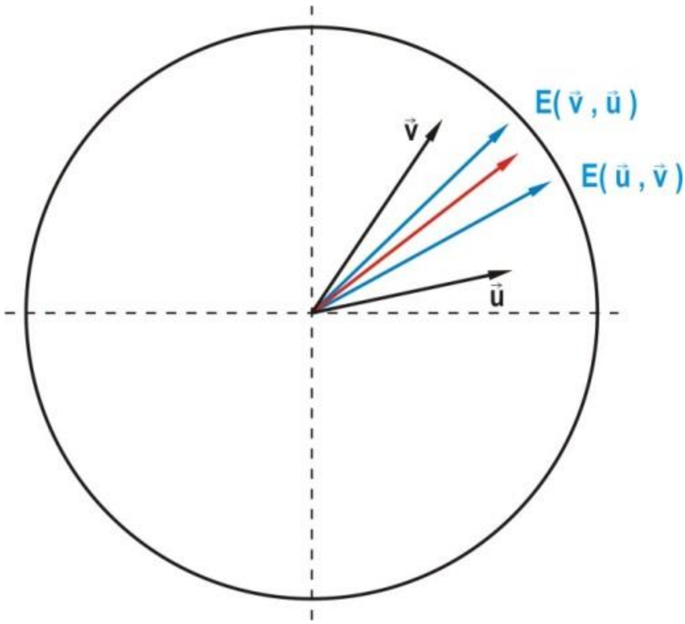
- gamma leképezéssel felvetítjük a vektorokat a β síkra $\boldsymbol{a} \rightarrow \gamma(\boldsymbol{a}) \cdot \boldsymbol{a}$ és $\boldsymbol{b} \rightarrow \gamma(\boldsymbol{b}) \cdot \boldsymbol{b}$
- a β sík *oxy* koordinátarendszerének vektorterében összeadjuk a két vektort és a $\gamma(\boldsymbol{a}) \cdot \boldsymbol{a} + \gamma(\boldsymbol{b}) \cdot \boldsymbol{b}$ összeget, mint lineáris kombinációt $L(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$ – vel jelöljük.
  $L(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = \gamma(\boldsymbol{a}) \cdot \boldsymbol{a} + \gamma(\boldsymbol{b}) \cdot \boldsymbol{b}$
- az $L(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$ vektort a delta vetítéssel leképezzük az *OXY* sík középponti helyzetű *c* sugarú nyílt körlemezére.
  $\delta(L(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})) \cdot L(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$
  A nyílt körlemezen az **a** és **b** vektorok összege definíciónk szerint
  $\boldsymbol{a} \oplus \boldsymbol{b} = \delta(L(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})) \cdot L(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$

Mivel a definícióban csak a klasszikus vektorműveletek szerepelnek ugyanezt a definíciót alkalmazhatjuk a háromdimenziós *c* sugarú nyílt gömbre is.



4. ábra

Ugyanezt a definíciót kaptuk a c sugarú nyílt gömb középponti kezdőpontú **u** és **v** kötött vektorok összeadására a hiperbolikus geometriából is. Ha az **u** és **v** Einstein összegét $E(\mathbf{u},\mathbf{v})$ – vel jelöljük, akkor $E(\mathbf{u},\mathbf{v}) = \frac{1}{1+\frac{\mathbf{uv}}{c^2}}\left\{\mathbf{u} + \frac{1}{\gamma_\mathbf{u}}\mathbf{v} + \frac{1}{c^2}\frac{\gamma_\mathbf{u}}{1+\gamma_\mathbf{u}}(\mathbf{uv})\mathbf{u}\right\}$ [2] kifejezést kapjuk. Ezek után a számítástechnika segítségével ábrázolhatjuk az egyszerűség kedvéért az xy síkból tetszőlegesen választott **u** és **v** megengedett sebességeket és különböző összegeiket.



5. ábra

A pirossal ábrázolt vektor a nem kommutatív Einsteini vektor-összeadás eredői között az euklidészi geometriából levezetett sebesség összeadás eredménye.

	r	α[°]
u	*0,72*	*12°*
v	*0,82*	*56°*
E(**u,v**)	*0.96*	*29°*
E(**v,u**)	*0.96*	*44°*
u⊕v	*0,92*	*38°*

Felhasznált irodalom:

1. Vladimir Varičak: Anwendung der Lobatschefskijschen Geometrie in der Relativtheorie. Physikalische Zeitschirft, 1910, 11:93-96
2. Abraham A. Ungar: A hiperbolikus geometria alkalmazása a relativisztikus fizikában. Bolyai – emlékkönyv Bolyai János születésének 200. évfordulójára, Vincze kiadó 2004
3. Szász Pál: Bevezetés a Bolyai – Lobacsevszkij féle geometriába. Akadémiai Kiadó Budapest 1973
4. G. Horváth Ákos, Szirmai Jenő: Nemeuklideszi geometriák modelljei. Typotex Kiadó Budapest 2004